x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

• f est continue sur $\mathbf{R}$ donc $f(\mathbf{R})$ est l'intervalle $[-1,1[$.

2°/ $f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2+1}=x \Leftrightarrow x^2-1=x^3+x \Leftrightarrow x^3-x^2+x+1=0$

Conclusion : (E) est équivalente à $g(x)=0$ où $g(x)=x^3-x^2+x+1$.

3°/ g est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ comme étant fonction polynôme,

$g'(x)=3x^2-2x+1$.

$3x^2-2x+1=0$, $\Delta=4-12=-8<0 \Rightarrow \forall x\in\mathbf{R},\ g'(x)>0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ et par suite 0 admet un seul antécédent $\alpha\in\mathbf{R}$ par g .

Conclusion : (E) admet une solution α . α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y=x$.

4°/a) φ est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ donc φ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\varphi(\mathbf{R}_+)=[-1,1[$.

b) $\varphi^{-1}:[-1,1[\to \mathbf{R}_+$

$x\mapsto \varphi^{-1}(x)=y$

$$\varphi^{-1}(x)=y \Leftrightarrow \varphi(y)=x \Leftrightarrow \frac{y^2-1}{y^2+1}=x \Leftrightarrow y^2-1=xy^2+x$$

$$\Rightarrow y^2(1-x)=x+1$$

or $x\neq 1$ donc $y^2=\dfrac{x+1}{1-x}$

or $x\in[-1,1[$ donc $\dfrac{x+1}{1-x}>0$